

PREDIÇÃO NUMÉRICA DO CONTROLE MECÂNICO NA DINÂMICA POPULACIONAL DOS MOSQUITOS DA DENGUE

Lucas Romero Galvão SILVA¹
Fernando Luiz Pio dos SANTOS¹

- RESUMO: Este trabalho tem por objetivo analisar a dinâmica populacional do mosquito da dengue com controle mecânico na fase aquática. O modelo matemático que descreve a dinâmica populacional dos mosquitos da dengue nas fases imatura e alada é dado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear. O controle mecânico aplicado na fase aquática é modelado por meio de uma equação diferencial acoplada ao modelo. Para obter a solução numérica do modelo, as equações diferenciais são discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) explícito. Simulações computacionais considerando parâmetros que definem ausência de controle e um controle efetivo da população de mosquitos foram efetuadas. Resultados numéricos convergidos são apresentados e mostram os efeitos do controle na dinâmica populacional dos mosquitos.
- PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais ordinárias; diferenças finitas; solução numérica.

1 Introdução

A dengue é uma doença febril causada pelo vírus do gênero Flavivírus da família Flaviviridae. A transmissão para os seres humanos ocorre pela picada do mosquito fêmea, do gênero *Aedes aegypti*, contaminada por este vírus. A vacina contra a dengue foi licenciada para uso em pessoas vivendo em áreas endêmicas. Porém, o vetor transmissor da dengue também transmite febre amarela, Chikungunya e o vírus Zika (WHO, 2009). Atualmente há quatro sorotipos: DEN-1, DEN-2, DEN-3 e DEN-4. Tal enfermidade é característica de regiões tropicais e subtropicais (HALSTEAD, 2007). Em particular, no Brasil sua incidência

¹Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Instituto de Biociências, Departamento de Bioestatística, CEP: 18618-970, Botucatu, SP, Brasil. E-mail: ro-mero.silva@unesp.br; fernando.pio@unesp.br

tem crescido nas últimas décadas (FLORENTINO *et al.*, 2014), sendo um dos maiores desafios da saúde pública e estando presente em todos os 27 estados da Federação (SILVA, 2013; WHO, 2009; CDC, 2010; McBRIDEA e BIELEFELDT-OHMANNB, 2000). A infecção pelo vírus pode desenvolver uma complicação letal chamada dengue hemorrágica que causa sérias enfermidades ou até mortalidade, principalmente em crianças e em pessoas de idade avançada, em países da Ásia e da América latina, (HALSTEAD, 2007; WHO, 2009).

O ciclo de vida do *Aedes aegypti* compreende duas fases: aquática (ovo, larva e pupa) e alada (mosquito adulto). Devido à grande resistência dos ovos de *Aedes aegypti* às épocas secas, aliada às condições favoráveis ao seu desenvolvimento, sua erradicação ainda está longe de ser atingida. Assim, a única forma é estabelecer mecanismos de controle eficientes da doença que reduzam a população do mosquito transmissor.

Os controles do mosquito transmissor da dengue utilizados pela SUCEN (Superintendência de Controle de Endemias) são: controle mecânico e controle químico (SUCEN, 2008). O controle mecânico, também conhecido como controle físico, consiste essencialmente de remoção ou limpeza (quando não se tem a possibilidade de remoção) de depósitos de água limpa e parada, realizado pelos agentes de saúde pública e/ou pelos moradores. O controle químico se faz aplicando inseticidas. Porém, neste caso, com o passar do tempo os vetores adquirem resistência aos inseticidas (LUZ *et al.*, 2009; SCHECHMAN e SOUZA, 2015), sendo necessário um aumento de produtos químicos, elevando os custos do controle e afetando a saúde pública (FLORENTINO *et al.*, 2014; CDC, 2010; McBRIDEA e BIELEFELDT-OHMANNB, 2000; TEIXEIRA *et al.*, 2009). Como alternativa, poder-se-ia utilizar o chamado controle biológico, com a inserção de organismos vivos no ambiente. Uma forma particular deste tipo de controle é a inserção de mosquitos machos estéreis por radiação na região endêmica. Tal população de mosquitos machos estéreis, onde se espera que ocorra o acasalamento com fêmeas férteis transmissoras, não gera uma população de novos mosquitos transmissores (THOMÉ *et al.*, 2010; NISHIURA, 2006; SANTOS, 2015; TEIXEIRA *et al.*, 2009). Porém, trabalhos científicos mostram que tal alternativa isolada não é efetiva no controle da dengue. Por exemplo, o controle genético reduz a população dessa classe de mosquitos se aplicada integrada com o controle químico (FLORENTINO *et al.*, 2014). Porém, essa ação integrada é efetiva aplicando-se inicialmente elevadas quantidades do controle químico. Portanto, este trabalho concentra-se na aplicação do controle mecânico do vetor da dengue, possibilitado por investimentos em agentes de saúde pública e pela preocupação dos moradores na remoção de criadouros do vetor. Neste trabalho, o controle mecânico é modelado definindo-se parâmetros relacionados ao grau de investimento do poder público em agentes e ao grau de esquecimento dos moradores, ambos aplicados no combate do mosquito na forma imatura.

A próxima seção descreve o modelo matemático que será utilizado para analisar os efeitos do controle mecânico da população de mosquitos transmissor da dengue na fase aquática.

2 Modelo matemático

A predição da dinâmica de populações pode ser obtida pelo rigor da linguagem da matemática. Nesta linha, modelos matemáticos têm trazido importantes contribuições, em particular, na investigação de epidemias causadas por vetores e interação com a população de seres humanos (ANDRAUD *et al.*, 2012; HASTINGS, 1997; CASTRO *et al.*, 2011). Sistema de equações diferenciais pode ser utilizadas como modelo simples para uma série de problemas clássicos (FIGUEIREDO e NEVES, 2008; ZILL, 2011).

O Modelo compartimental baseado em sistemas de equações diferenciais (CULLEN, 1985) é utilizado para entender a dinâmica da população do mosquito da dengue considerando as fases aquática (imatura) e alada. Na fase alada, tem-se a população de mosquitos machos e fêmeas não fertilizadas e fertilizadas. Adota-se as notações $A(t)$, $I(t)$, $F(t)$ e $M(t)$ para as densidades de populações no tempo $t \geq 0$ de mosquitos na fase aquática (ovo, larva e pupa), fêmeas não fertilizadas (antes de acasalar), fêmeas fertilizadas (depois de acasalar) e de machos (macho selvagem). Os parâmetros μ_A , μ_I , μ_F e μ_M são, respectivamente, as taxas de mortalidade per capita dos mosquitos na fase aquática, das fêmeas imaturas, fêmeas fertilizadas e machos. Além disso, a taxa de oviposição da fêmea fertilizada F é proporcional a sua densidade e dependerá do número de criadouros, sendo dada por $\phi \left(1 - \frac{A}{C}\right)$, onde ϕ é a taxa de oviposição intrínseca e C é a capacidade do meio relacionada com a disponibilidade de nutrientes, com as dimensões do criadouro e outros aspectos. Os mosquitos na fase aquática A passam para a fase alada com uma taxa per capita γ , onde uma proporção r são de fêmeas e $(1-r)$ são de machos. A mudança de fase das fêmeas não-fertilizada I para a fase fertilizada F depende do número de encontros com os machos M . β é a taxa de acasalamento dos mosquitos naturais. Finalmente, $\alpha \geq 0$ é o controle mecânico considerado no modelo e aplicado na população de mosquitos na fase aquática. Dessa forma, as Tabelas (1) e (2) resumem, respectivamente, as variáveis de estado representando a modelagem da densidade populacional no tempo t e os parâmetros biológicos do problema.

Tabela 1 - Variáveis de estado (densidade populacional) no tempo t

$A(t)$	população de mosquito na fase aquática
$I(t)$	população de fêmeas não-fertilizadas
$F(t)$	população de fêmeas fertilizadas
$M(t)$	população de machos

Considerando todas as afirmações anteriores, podemos descrever os modelos **A** (ausente de controle mecânico) e **B** (com presença do controle α)

Tabela 2 - Parâmetro e descrição biológica

Parâmetros	Descrição biológica
μ_A	Taxa de mortalidade na fase aquática
μ_I	Taxa de mortalidade da fêmea não-fertilizadas
μ_F	Taxa de mortalidade da fêmea fertilizada
μ_M	Taxa de mortalidade do macho
ϕ	Taxa de oviposição intrínseca
C	Capacidade de suporte do meio
γ	Passagem para a fase alada
r e $1 - r$	Proporção de fêmeas e machos, respectivamente
β	Taxa de acasalamento dos mosquitos
α	Controle mecânico

• **Modelo A:** Sem controle mecânico (ESTEVA e YANG, 2005; YANG *et al.*, 2009; THOMÉ *et al.*, 2010)

O modelo matemático com base em (ESTEVA e YANG, 2005) é descrito pelo sistema (1) seguinte. Para efeitos de comparação denotaremos o sistema (1) por modelo **A**, que não considera controle na sua formulação.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dt} = \phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A)A \\ \frac{dI}{dt} = r\gamma A - (\beta + \mu_I)I \\ \frac{dF}{dt} = \beta I - \mu_F F \\ \frac{dM}{dt} = (1 - r)\gamma A - \mu_M M \end{array} \right. \quad (1)$$

Em seguida iremos descrever o modelo **B** com a proposta de um controle mecânico na fase aquática do mosquito.

• **Modelo B:** Presente proposta considerando com controle mecânico.

Nesta investigação, propõem-se o parâmetro de controle α no compartimento da fase aquática A . Isto significa dizer que o termo $-\alpha A$ deve aparecer na equação para $\frac{dA}{dt}$.

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = \phi \left(1 - \frac{A}{C}\right) F - (\gamma + \mu_A)A - \alpha A \\ \frac{dI}{dt} = r\gamma A - (\beta + \mu_I)I \\ \frac{dF}{dt} = \beta I - \mu_F F \\ \frac{dM}{dt} = (1-r)\gamma A - \mu_M M \end{cases} \quad (2)$$

A Figura (1) seguinte ilustra a dinâmica populacional do modelo com controle mecânico **B** dado por (2).

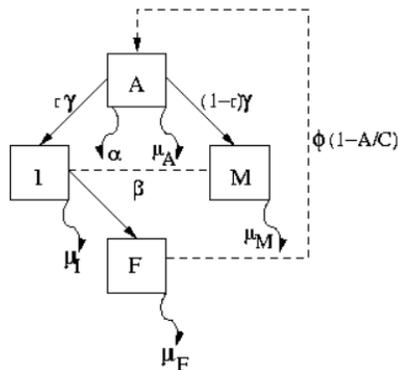


Figura 1 - Esquema compartimental das fases aquática (A) e alada das populações de mosquitos machos (M), fêmeas não-fertilizadas (I) e fêmeas fertilizadas (F).

Na presente proposta para o controle mecânico do mosquito considera-se α variável no tempo e dependente de dois parâmetros fixos relacionados ao grau u de investimentos do poder público no combate do vetor e ao grau τ de esquecimento dos moradores na remoção de ovos do vetor na fase aquática. A Equação (3) seguinte representa o nosso modelo de controle, que leva em conta os parâmetros u e τ . Esta equação deve ser resolvida no modelo **B** de forma desacoplada.

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\tau\alpha + u \quad (3)$$

Dessa forma, a Equação (3) juntamente com o sistema dado em (2) representam o modelo **B** para investigar o controle mecânico do mosquito transmissor da dengue.

A seção seguinte descreve o modelo discretizado para obtenção dos resultados numéricos das simulações.

2.1 Discretização

As derivadas ordinárias dos modelos **A** e **B** são discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) explícito de ordem 1 (HOLMES, 2007). A escolha deste método foi devido ao fato que o esquema *Runge-Kutta* de 4ª ordem não produziram melhoras significativas. Seja Φ uma função genérica, segue então que $\frac{d}{dt}\Phi$ aproximada pelo MDF, fica

$$\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\Phi(t + dt) - \Phi(t)}{dt} + O(dt),$$

sendo $dt = T/N$ o passo de tempo, T é o tempo total, N é o número total de pontos para a partição do intervalo $[0, T]$ e, finalmente, $O(dt)$ o erro de primeira ordem. O MDF explícito aplicado para aproximar $\frac{dA}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$, $\frac{dF}{dt}$ e $\frac{dM}{dt}$, o modelo **B** dado em (2), fica:

$$\begin{cases} A^{n+1} = \frac{1}{1 + dt(\gamma + \mu_A + \alpha^n) + dt\frac{\phi}{C}F^n} [A^n + dt\Phi F^n] \\ I^{n+1} = \frac{1}{1 + dt(\beta + \mu_I)} [I^n + dt\gamma r A^{n+1}] \\ F^{n+1} = \frac{1}{1 + dt\mu_F} [F^n + dt\beta I^{n+1}] \\ M^{n+1} = \frac{1}{1 + dt\mu_M} [M^n + dt\gamma(1 - r)A^{n+1}] \end{cases} \quad (4)$$

O controle mecânico α na sua formulação discretizada pelo MDF, fica:

$$\alpha^{n+1} = \frac{1}{1 + \tau dt} (\alpha^n + u dt) \quad (5)$$

Similarmente, a discretização do modelo **A** pode ser obtida aplicando o MDF em (1), ou ainda, bastando tomar o modelo discreto (4), com $\alpha^n = 0$ e desconsiderando a Equação (5). Na seção seguinte tem-se a validação do modelo matemático **B** da dinâmica populacional dos mosquitos da dengue.

3 Validação do modelo B

Com o intuito de validar o modelo **B** para analisar os efeitos dos parâmetros de controle mecânico na dinâmica populacional dos mosquitos da dengue, comparam-se os resultados numéricos obtidos a partir das formulações discretizadas, conforme descritas na seção 2.1 anterior. Para as simulações computacionais foram utilizados os dados apresentados nas Tabela (2). Os modelos **A** e **B** foram implementados

computacionalmente na linguagem de programação em C++, utilizando o software DeV-C++ executado no sistema operacional windows 8.1 por um notebook Dell Inspiron 15 5000 Series com 8GB de memória RAM e processador Intel Core i7-4510U.

Tabela 3 - Parâmetros biológicos, (Esteva e Yang, 2005; Yang et al., 2009)

C	γ	ϕ	r	β	μ_A	μ_I	μ_F	μ_M
13	0.07	0.5	0.5	1	0.05	0.05	0.05	0.1

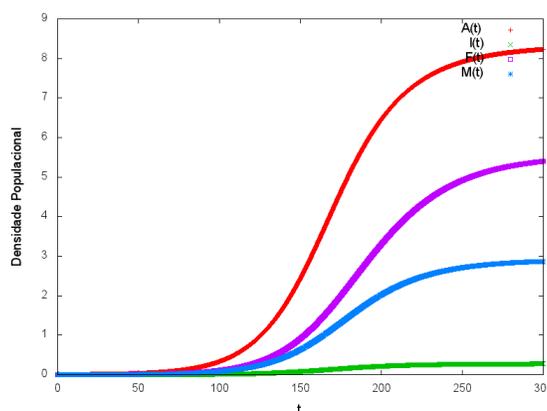


Figura 2 - Dinâmica populacional computacional do mosquito ao longo do tempo $t \geq 0$. Parâmetros de Simulação: $A(0) = 0.01$; $I(0) = F(0) = M(0) = 0$; $dt = 0.1$; $\tau = u = 0$; $T = 300$.

Para o processo de validação considera-se no instante inicial uma baixa densidade populacional da fase aquática e a inexistência das demais populações. Isto significa considerar as condições iniciais para as variáveis de estado: $A(t) = 0.01$, $I(t) = F(t) = M(t) = 0.0$. A Figura (2) mostra o crescimento da população de mosquitos, após aproximadamente $T = 150$ dias. Nota-se nesta figura, que o estado de epidemia é atingido no tempo total $T = 300$ dias simulado. Este resultado numérico corrobora com os descritos em (FLORENTINO *et al.*, 2014) que utiliza modelo similar de Thomé *et al.*, (2010), onde ambos aplicam controles (biológico e químico), porém na fase alada da população de mosquitos da dengue.

Contudo, este resultado sugere fortemente a importância de se investigar um controle efetivo, visto que a partir da situação supostamente livre da população de mosquitos, exceto pela pequena densidade imposta na fase aquática, é suficiente para que a dinâmica atinja o estado epidêmico.

A Figura (3) mostra o comportamento das populações em estado epidêmico. Em (a), tem-se os resultados numéricos do modelo **A** que não considera controle. Em (b), apresenta-se os resultados numéricos do modelo **B** obtidos resolvendo-se

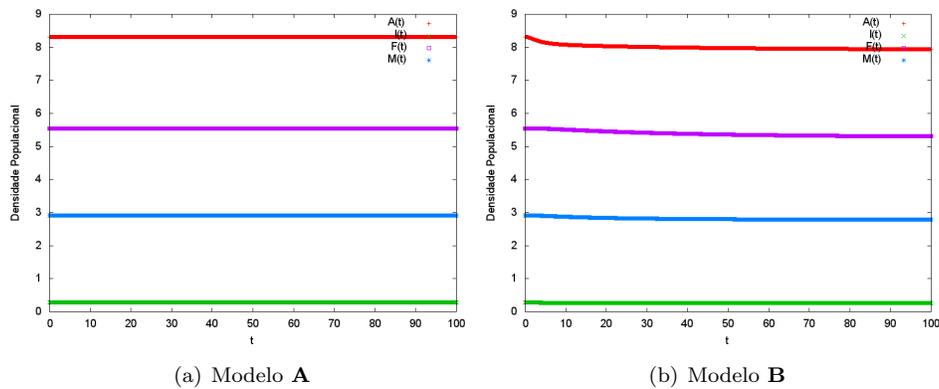


Figura 3 - Comparação entre modelos **A** e **B** no estado epidêmico: (a) Modelo **A**: desconsiderando o parâmetro de controle, $\alpha = 0$; (b) Modelo **B**: considerando $\alpha \neq 0$ não-efetivo, $\tau = 1.0$ e $u = 0.01$.

o sistema discretizado (4) juntamente com a Equação (5) do controle mecânico. Observando-se os resultados exibidos na Figura (3) - (a) e (b) para o processo de validação entre os modelos é possível verificar um alto grau de similaridade do modelo **B**, quando parâmetros de um controle não-efetivo é escolhido, com o modelo **A** que não considera controle na sua formulação original.

4 Validação do controle mecânico

Aplicando-se o método de separação de variáveis na Equação (5) do modelo de controle mecânico proposto, obtém-se a seguinte solução analítica,

$$\alpha(t) = \frac{u}{\tau}(1 - e^{-\tau t}) \quad (6)$$

No processo de validação do modelo, a comparação entre as curvas analítica (ou solução exata), dada pela Equação (6), e numérica, dada pela Equação (5) na forma discretizada foi realizada. Conforme pode ser visto na Figura (4), a curva numérica aparece com uma boa proximidade da solução exata, o que valida o modelo a ser utilizado nos testes performados neste artigo. Os parâmetros de simulação utilizados para esta comparação foram: $\tau = u = 1$, no período de $t = 8$ dias.

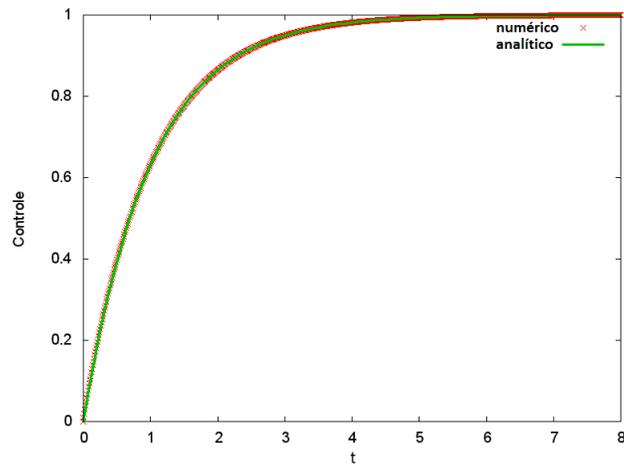


Figura 4 - Comparação das soluções analítica e numérica do controle mecânico. Parâmetros $\tau = u = 1$; $t = 8$ dias.

4.1 Controle mecânico constante

Vale destacar que fazendo $\tau = u = 0$ na Equação (6), obtém-se $\alpha^{n+1} = \alpha^n = \alpha = \text{constante}$. Com isto, o termo $-(\mu_A + \alpha)A$ do lado direito da equação $\frac{dA}{dt}$ da fase aquática pode ser reescrito como μ'_A , com $\mu'_A = \mu_A + \alpha$. Portanto, α constante significa um acréscimo à mortalidade natural do mosquito na fase aquática, μ_A .

Apresenta-se aqui os resultados numéricos de simulação do modelo com controle, considerando diferentes valores constantes para α , $\alpha \in [0, 1]$. Como esperado, a densidade da fase aquática decresce no intervalo de simulação, conforme α tende a 1. Isto evidencia o forte efeito do controle da população nesta fase.

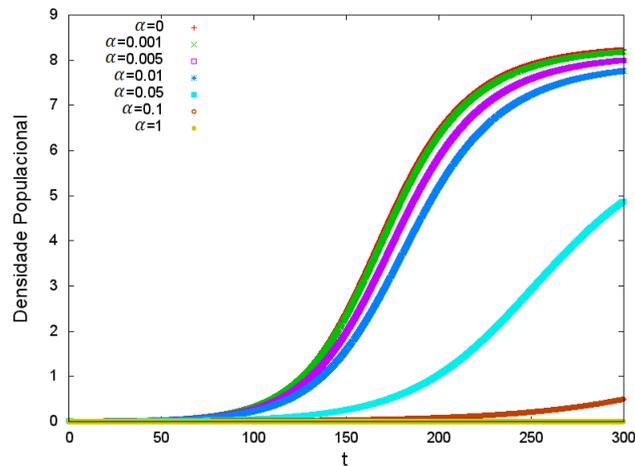


Figura 5 - Atuação do controle mecânico sobre a fase aquática do mosquito para diferentes valores de α (constante) e comparação com o modelo com $\alpha = 0$ (sem controle).

Pode-se notar nos resultados numéricos desta simulação (vide Figura 5) a existência de uma família de curvas bem evidentes em que o controle mecânico mostra-se não efetivo na diminuição da densidade da fase aquática do mosquito. Por outro lado, nota-se também (vide Figura 5) a existência de curvas em que o controle é efetivo na diminuição da densidade de $A(t)$. Isto reforça ainda mais a ideia de se investigar o controle mecânico variante no tempo, que permita além disso, se estabelecer a priori parâmetros específicos para os quais se desejam implementar ações de controle. Nesta investigação, estamos então propondo um modelo cujo parâmetros possibilitam ações de controle de acordo com grau de investimento no combate do vetor transmissor e de esquecimento na remoção dos ovos.

4.2 Comparação controle constante vs variante no tempo

Nesta seção, apresenta-se a comparação dos resultados numéricos de simulação considerando α constante e variando no tempo. Conforme os resultados mostram na Figura (6), para um dado conjunto de parâmetros τ e u , existe um controle que é efetivo tanto quanto se tomar α contante igual 1, mas com a vantagem de possibilitar dois níveis de controle, no caso, remoção de ovos e investimento do poder público. Outra importante vantagem desta proposta de controle é possibilitar, por exemplo, que tomadores de decisão possam avaliar a melhor estratégia no combate ao mosquito.

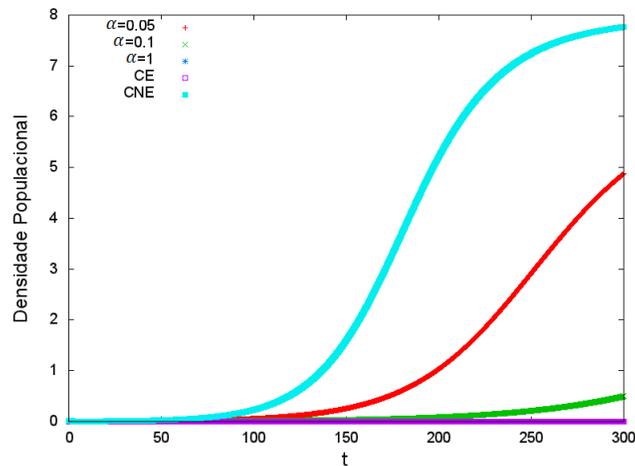
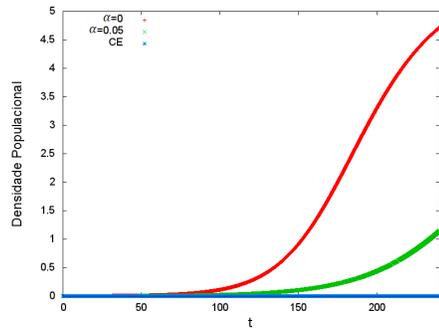


Figura 6 - Comparação dos resultados numéricos de simulação para diferentes configurações para o controle mecânico: α constante, controle efetivo (CE), $\tau = u = 1.0$ e controle não-efetivo (CNE), $\tau = 1.0$ e $u = 0.01$.

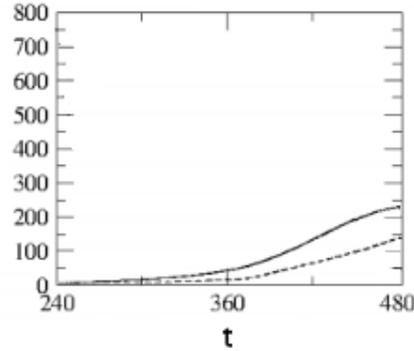
Os resultados numéricos exibidos na Figura (6), mostram que α constante igual a 1 foi eficiente no controle, diminuindo a densidade de $A(t)$ tanto quanto para $\alpha = \alpha(t)$, com $\tau = u = 1.0$. Porém, como descrito anteriormente, considerar o controle variante no tempo e de acordo com o modelo proposto tem-se ações de controle flexibilizadas por permitir, por exemplo, que tomadores de decisão possam definir diferentes configurações para o par (τ, u) .

4.3 Comparação qualitativa do controle mecânico: Modelo proposto vs modelo de Carvalho *et al.* (2015)

Nesta seção compara-se a presente proposta de modelo de controle mecânico com o descrito por Carvalho *et al.* (2015). O modelo apresentado na Figura (11)-a mostra a atuação do controle mecânico proposto sobre uma população de fêmeas fertilizadas. A Figura (11)-b (modificada) mostra a atuação de um controle mecânico proposto por Carvalho *et al.* (2015) na redução da população de mosquitos infectados que altera a capacidade intrínseca do meio. Os resultados de Carvalho *et al.* (2015) exibidos na Figura (11)-b considera sazonalidade e parâmetros de condições favoráveis de reprodução do mosquito, ou seja, ambientes com temperatura entre 22 °C e 30 °C com alto índice de umidade. Dessa forma, a comparação de ambos resultados mostrados na Figura (11)-a e Figura (11)-b evidencia dinâmicas de controle qualitativamente próximas.



(a) Modelo Proposto



(b) Modelo de Carvalho et al., 2015

Figura 7 - Comparação entre modelos de controle mecânico proposto neste artigo e o modelo proposto por Carvalho et al.; (a) População de fêmeas fertilizadas sobre ação do controle mecânico. $T = 240$ dias. (b) Atuação do controle mecânico sobre a população do mosquito infectado em condições favoráveis ao longo do tempo t (dias). Linhas sólida e tracejada significam sem controle e com controle mecânico, respectivamente.

Dada a validação dos modelos, a próxima seção descreve os resultados numéricos de simulação do modelo **B** para diferentes valores dos parâmetros de controle u e τ .

5 Resultados numéricos do modelo **B**

Descreve-se aqui os resultados numéricos de simulação da dinâmica populacional do mosquito da dengue nas fases aquática e alada, com controle mecânico na fase aquática utilizando o modelo **B** validado na seção (3) anterior. A Tabela (1) (RODRIGUES *et al.*, 2010) mostra as condições iniciais utilizadas nas simulações computacionais do modelo **B**.

Tabela 4 - Condições iniciais utilizadas nas simulações computacionais no estado epidêmico

	$A(t)$	$I(t)$	$F(t)$	$M(t)$
Estado epidêmico	8.3200	0.2773	5.5467	2.9120

Nos testes a seguir, verifica-se os efeitos da combinação dos parâmetros de controle na dinâmica populacional dos mosquitos.

5.1 Teste 1: $\tau = 0.01$ e $u = 1.0$ (controle fortemente efetivo)

Neste teste, considera-se baixa taxa de esquecimento da remoção de ovos da fase aquática e alta taxa de investimento do poder público no combate ao vetor, ou seja, $\tau = 0.01$ e $u = 1.0$, respectivamente. A dinâmica pode ser vista na Figura (3) seguinte. Nota-se, assim, que esta combinação é efetiva no controle desejado, uma vez que as populações estão tendendo à zero, a partir do instante de tempo $T = 70$ dias, aproximadamente.

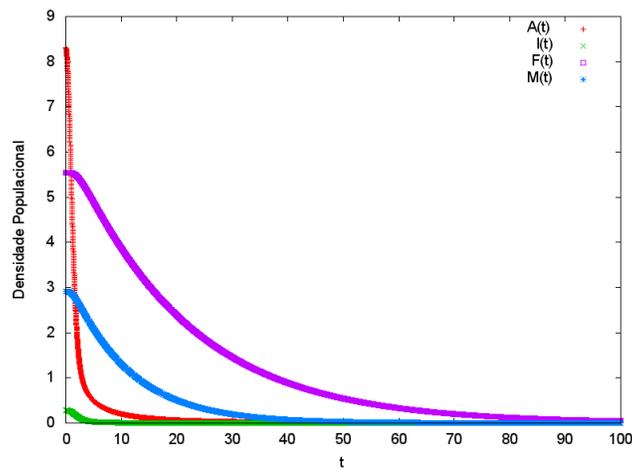


Figura 8 - Teste 1: Controle fortemente efetivo das populações para parâmetros de controle $\tau = 0.01$ (baixa taxa de esquecimento) e $u = 1.0$ (alta taxa de investimento); Tempo total: $T = 100$.

5.2 Teste 2: $\tau = u = 1.0$ (controle efetivo)

A Figura (7) mostra o comportamento das populações considerando, para este teste, alta taxa de esquecimento e alta taxa de investimento, ou seja, $\tau = u = 1$, para $T = 140$ dias. Os resultados numéricos mostram que esta combinação também é efetiva no controle das populações, porém leva-se mais tempo se comparadas com a combinação do Teste 1, onde foram necessários 100 dias para atingir esta situação da população livre de mosquitos.

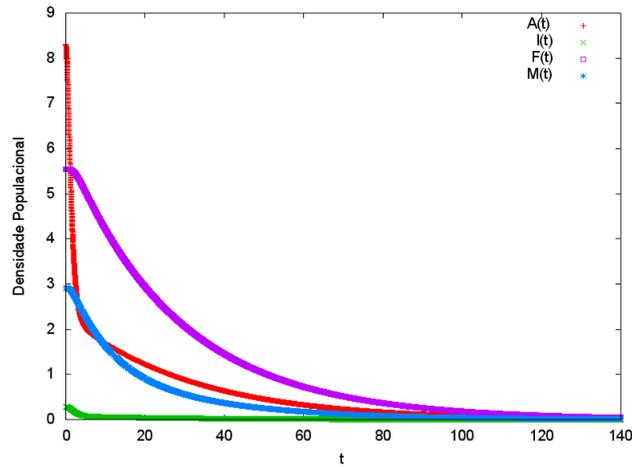


Figura 9 - Teste 2: Controle efetivo com alta taxa de investimento e alta taxa no esquecimento, $\tau = u = 1$ e $T = 140$.

5.3 Teste 3: $\tau = u = 0.01$ (controle efetivo fraco)

A Figura (9) apresenta o comportamento das populações considerando uma baixa taxa de esquecimento e uma baixa taxa de investimento, ou seja, $\tau = u = 0.01$ com $T = 210$ dias. Averigua-se que esta combinação de parâmetros também é efetiva, porém o seu resultado é ainda mais demorado se comparado com o Teste 1 e 2. Para se chegar ao resultado final equivalente aos outros testes foram necessários 210 dias.

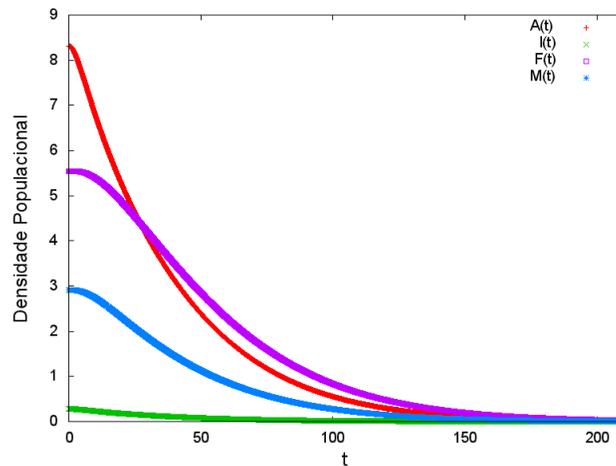


Figura 10 - Teste 3: Controle efetivo fraco das populações para parâmetros de controle $\tau = u = 0.01$; $T = 210$.

5.4 Teste 4: Controles efetivo e não-efetivo em intervalos de tempos distintos

A Figura (6) simula os efeitos de um controle efetivo $\tau = u = 0.01$ ao longo de todo o período de $T = 200$ dias, cujas densidades de mosquitos e ovos aproximam-se de zero. Ao final deste período as curvas de $T \geq 200$ dias, foi imposta uma alta taxa de esquecimento na remoção do vetor na fase aquática, $\tau = 1.0$. Esta imposição aliada ao baixo investimento $u = 0.01$, tem-se a combinação de parâmetros para um controle não-efetivo a partir deste tempo. Assim, as populações retornam rapidamente para o estado epidêmico em níveis próximos do que havia no estante inicial ($t = 0$). Isto indica que é crucial que os cuidados de remoção dos ovos, bem como os investimentos devem ser mantidos ao longo de todo o tempo para que o ambiente fique livre do vetor e, conseqüentemente, livre do estado epidêmico da doença da dengue.

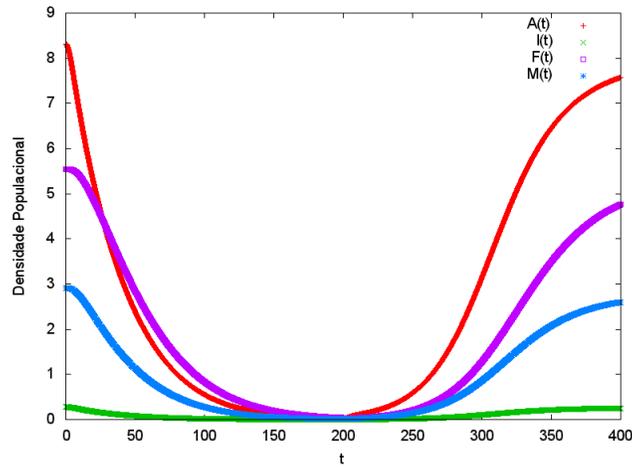


Figura 11 - Teste 4: Dinâmica populacional com taxas distintas em dois intervalos de tempo distintos. Baixa taxa de esquecimento e alta taxa de investimento, para $T < 200$ dias. Alta taxa de esquecimento, $\tau = 1.0$, e baixa taxa de investimento, $u = 0.01$, $T \geq 200$ dias.

6 Discussão

Nesta investigação numérica, um modelo matemático para o controle mecânico da população de mosquito na fase aquática foi proposto. Neste modelo foi incorporado uma equação diferencial, desacoplada do sistema, representando o controle mecânico das populações de mosquitos na fase aquática. Tal controle leva em conta os parâmetros u e τ que representam o controle dependente do investimento do poder público no combate do vetor e do grau de esquecimento da população na remoção dos ovos do vetor, respectivamente. Para obtenção das soluções numéricas, o modelo e a equação representando o controle foram discretizados utilizando o método das diferenças finitas de primeira ordem. Acerca dos resultados numéricos obtidos por meio das simulações numéricas dos testes realizados, enumeram-se os seguintes pontos:

- O modelo **B** que considerar o controle mecânico na fase aquática, com $\tau = 1.0$ e $u = 0.01$ foi validado com o modelo **A** que não considera controle na sua formulação. A Figura (4) mostra a proximidade das soluções numéricas obtidas, simulando-se os modelos de dinâmica populacional em dengue;
- A solução numérica da equação do controle mecânico apresentou mesmo comportamento e uma boa aproximação em relação a solução analítica (exata), conforme apresentado na Figura (7);
- Na seção (4.1) foi mostrado que considera o controle mecânico constante

implica adicionar um novo parâmetro α à taxa de mortalidade na fase aquática. Como teste, diferentes valores foram atribuídos à α . Os resultados numéricos obtidos mostram a existência de famílias de curvas em que o controle é efetivo ou não efetivo na diminuição das densidades populacionais. Além disso, reforçou a ideia de se empregar um controle α variante no tempo;

- Na ausência de controle ($\tau = u = 0.0$) em um ambiente inicialmente livre de mosquitos na fase alada, mas com condição inicial considerando baixa densidade na fase aquática foi suficiente para ter o crescimento da população de mosquitos na fase alada convergindo para o estado epidêmico da doença, conforme mostra a Figura (2) da seção (3) sobre validação;
- O decaimento das populações dos mosquitos foi obtido até estabilizar-se próximo de zero, devido ao controle fortemente efetivo obtido com a combinação de parâmetros $\tau = 0.01$ e $u = 1.0$, que considera baixa taxa de esquecimento e alta taxa de investimento, respectivamente, conforme mostrado na Figura (4) do Teste 1;
- Considerando o controle não-efetivo no combate do vetor, no caso $\tau = 1.0$ e $u = 0.01$, a população dos mosquitos volta a crescer e retorna ao estado epidêmico. A Figura (6) mostra esta dinâmica a partir de $T \geq 200$;
- O parâmetro de investimento é um importante fator de diminuição das populações de mosquitos próximas a zero. A Figura (7), do teste 2, mostra este aspecto no 140º dia. A respeito do parâmetro de esquecimento, comportamento similar ocorre no 200º dia, Figura (6).

Conclusões

Neste trabalho, um modelo de controle mecânico da população de mosquitos da dengue na fase aquática foi apresentado. Testes numéricos foram realizados para verificar os efeitos dos parâmetros de controle na dinâmica dessa população de mosquitos. Com base nos resultados discutidos, as principais conclusões que podem ser extraídas são:

1. No processo de validação, a solução numérica do modelo proposto de controle mecânico tem uma boa aproximação com a solução exata, obtida nesta investigação;
2. A comparação dos resultados numéricos obtidos com controle constante e variante no tempo, concordam qualitativamente com os descritos por (CARVALHO *et al.*, 2015);
3. O modelo matemático epidemiológico com controle mostrou ser importante na investigação dos efeitos de dois parâmetros de controle da população de mosquitos da dengue, a saber: investimento no combate do vetor e remoção de ovos do mosquito;

4. Foi possível estabelecer combinações de parâmetros para as quais o controle mecânico na fase aquática foi efetivo, bem como não efetivo no combate do vetor, abrindo possibilidades de definição de estratégias eficientes no combate a dengue;
5. Dentre as combinações de parâmetros de controle que foram efetivas existiu uma em particular que se mostrou mais efetiva. Isto abre uma perspectiva para uma investigação de um controle ótimo aplicando técnicas de otimização;
6. O código numérico desenvolvido mostrou ser uma importante ferramenta na simulação numérica em dengue, abrindo possibilidades de aplicações em outras doenças causadas por vetores.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos revisores e editores pelos comentários e sugestões.

SILVA, L. R. G.; SANTOS, F. L. P. Numerical prediction of mechanical control in the population dynamics of dengue mosquitoes. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.36, n.2, p.316-335, 2018.

■ **ABSTRACT:** *In this work we investigated the dynamic of dengue mosquitoes with mechanical control applied in the aquatic phase. The mathematical model describes the dynamic of dengue mosquitoes in the immature and winged phases. This model is based on a system of nonlinear ordinary differential equations (ODE). The mechanical control is modelled by an ODE coupled to the system and applied in the aquatic phase. In order to obtain the numerical solutions, the system was discretized using the finite difference method. Computational simulations considering the absence of control and the effective control of the mosquitoes were performed. The numerical results were presented and show the effects of the control in the dynamic of dengue mosquitoes.*

■ **KEYWORDS:** *Ordinary differential equation; finite differences; numerical solutions.*

Referências

ANDRAUD, M.; NIEL, H.; MARAIS, C.; BEUTELS, P. Dynamic epidemiological models for dengue transmission: a systematic review of structural approaches. *PLoS ONE*, v.7, n.11, 2012.

CARVALHO, S. A.; DA SILVA, S. O.; CHARRET, I. D. C. *Mathematical modeling of dengue epidemic: Control methods and vaccination strategies.* arXiv:1508.00961. 2015.

CDC: Centers for Disease Control and Prevention. Disponível em: <http://www.cdc.gov/Dengue/> (Acessado: 20 Setembro 2010).

- CULLEN, M. R. *Linear models in biology*. New York: John Wiley & Sons, 1985.
- CASTRO MEDEIROS, L. C.; CASTILHO, C. A. R.; BRAGA, C.; DE SOUZA, W. V.; REGIS, L.; MONTEIRO, A. M. V. Modeling the dynamic transmission of dengue fever: investigating disease persistence. *PLoS Negl Trop Dis*, v.5, n.1, p.e942, 2011.
- ESTEVA, L.; YANG, H. M. Mathematical model to assess the control of *Aedes aegypti* mosquitoes by the sterile insect technique. *Mathematical Biosciences*, v.198, p.132-147, 2005.
- FIGUEIREDO, D.; NEVES, A. *Equações diferenciais aplicadas*. Coleção matemática universitária. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- FLORENTINO, H. O.; BANNAWART, B. F.; CANTANE, D. R.; SANTOS, F. L. P. Multiobjective genetic algorithm applied to dengue control. *Mathematical Biosciences*, v.256, p.1-17, 2014.
- HALSTEAD, S. B. Dengue. *The Lancet*, v.370, n.9599, p.1644-1652, 2007.
- HASTINGS, A. *Population biology: Concepts and models*. Berlin: Springer, 1997.
- HOLMES, H. M. *Introduction to numerical methods in differential equations*. Berlin: Springer, 2007.
- LUZ, P. M.; CODEÇO C.T; MEDLOCK J.; STRUCHINER C. J.; VALLE D.; GALVANI A. P. Impact of insecticide interventions on the abundance and resistance profile of *Aedes aegypti*. *Epidemiology and Infection*. v.137, p.1203-1215, 2009.
- McBRIDEA, W. J. H.; BIELEFELDT-OHMANN, H. Dengue viral infections; pathogenesis and epidemiology. *Microbes Infect.*, v.2, p.1041-1050, 2000.
- NISHIURA, H. Mathematical and statistical analyses of the spread of dengue. *Dengue Bulletin*, v.30, 2006.
- RODRIGUES, H. S.; MONTEIRO, M. T.; TORRES, D. F. Dynamics of dengue epidemics when using optimal control. *Mathematical and Computer Modelling*, v.52, n.9, p.1667-1673, 2010.
- SANTOS, F. L. P. A general discrete patches approach to investigate the populational dynamics in dengue. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v.3, n.2, p.020016-1, 2015.
- SCHECHTMAN H.; SOUZA M. O. Costly inheritance and the persistence of insecticide resistance in *Aedes aegypti* populations. *PloS one*, v.10, n.5, p.e0123961, 2015.
- SILVA, S. O. D. *Modelagem de propagação da dengue com o uso de equações diferenciais e modelos tipo seir*. 87p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas) Universidade Federal de Lavras, p.87, 2013.

SUCEN. Superintendência em Controle de Endemias. *Normas e Orientações Técnicas para Vigilância e Controle de Aedes aegypti*. Disponível em: <http://www.saude.sp.gov.br/sucen-superintendencia-de-controle-de-endemias/homepage/downloads/arquivos-dengue> (Acessado:20 Setembro 2016).

TEIXEIRA, M. G.; COSTA, M. C. N.; BARRETO, F.; Barreto, M. L.; Dengue: twenty-five years since re-emergence in Brazil. *Cadernos de Saúde Pública*, v.25 ,n.1, p.7-18, 2009.

THOMÉ, R. C. A.; YANG, H. M.; ESTEVA, L. Optimal control of Aedes aegypti mosquitoes by the sterile insect technique and insecticide. *Mathematical Biosciences*, v.223, n.1, p.12-23, 2010.

WORLD HEALTH ORGANIZATION. *Dengue: Guidelines for diagnosis, treatment, prevention and control*. 2.ed. Geneva: WHO, 2009.

YANG, H. M., MACORIS, M. L. G., GALVANI, K. C., ANDRIGHETTI, M. T. M., WANDERLEY, D. M. V. Assessing the effects of temperature on the population of Aedes aegypti, the vector of dengue. *Epidemiology and Infection*, v.137, p.1188-1202, 2009.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem*. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Recebido em 29.02.2016.

Aprovado após revisão em 03.05.2017.